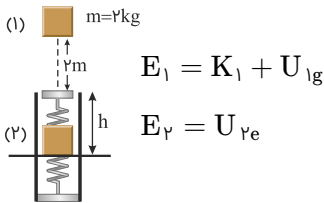


گزینه ۴

۱

سطح پتانسیل را پایین‌ترین نقطه‌ای که جسم قرار می‌گیرد در نظر می‌گیریم:



باتوجه به نداشتن اتلاف انرژی $E_1 = E_2$ است.

$$K_1 + U_{1g} = U_{2e} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 4 + 2 \times 10(2 + h) = 46$$

$$\Rightarrow 20(2 + h) = 42 \Rightarrow 2 + h = 2/1 \Rightarrow h = 0/1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

گزینه ۲

۲

گام اول: با استفاده از قضیه کار و انرژی، کار پمپ را به دست می‌آوریم:

$$W_{\text{پمپ}} + W_{\text{mg}} = K_2 - K_1 \xrightarrow{K_2=K_1} W_{\text{پمپ}} = -W_{\text{mg}}$$

$$W_{\text{پمپ}} = -(-mg\Delta h) = +(\rho V g \Delta h)$$

$$\Rightarrow W_{\text{پمپ}} = +(10^3 \times 3 \times 10 \times 24) = 7/2 \times 10^5 \text{ J}$$

گام دوم: توان مفید پمپ را به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{پمپ}}}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{7/2 \times 10^5}{60} = 1/2 \times 10^4 \text{ W} = 12 \text{ kW}$$

گام سوم: بازده پمپ برابر است با:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \Rightarrow Ra = \frac{12}{20} \times 100 = 60\%$$

گزینه ۴

۳

$$P_{\text{کل}} \times Ra = \frac{W}{t} \Rightarrow P \times \frac{\lambda}{10} = \frac{mg\Delta h}{t}$$

$$\Rightarrow P \times \frac{\lambda}{10} = \frac{252 \times 10^3 \times 10 \times 12}{3600} \Rightarrow P = 10/5 \times 10^3 \text{ W} = 10/5 \text{ kW}$$

گام اول

الف) اتومبیلی به جرم $m = 900 \text{ kg} \leftarrow 900 \text{ kg}$

ب) از حال سکون شروع به حرکت می‌کند $v_0 = 0$

ج) پس از $10 \text{ s} \leftarrow t = 10 \text{ s}$

د) سرعت آن به 72 km/h می‌رسد $\leftarrow v_1 = 20 \text{ m/s} = \frac{72}{3.6} \text{ m/s}$

هـ) توان متوسط اتومبیل چند کیلووات است؟ $P = \frac{W}{t} = ? \text{ kW}$

و) نیروی مقاوم در مقابل حرکت اتومبیل را نادیده بگیرید. \leftarrow اصل پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است.

گام دوم

ابتدا با استفاده از قضیه کار و انرژی اندازه کار کل موتور اتومبیل را به دست می‌آوریم؛ سپس به کمک رابطه $P = \frac{W}{t}$ توان را محاسبه می‌کنیم.

اتومبیل در مسیر افقی حرکت می‌کند، بنابراین:

$$W_{\text{موتور}} = K_2 - K_1$$

$$= \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \times 900 \times (20^2 - 0) = 180000 \text{ J}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{180000}{10} = 18000 \text{ W} = 18 \text{ kW}$$

گام اول

الف) جسمی به جرم 2 kg را $m = 2 \text{ kg}$

ب) از پایین سطح شیب‌داری که با افق زاویه 30° درجه می‌سازد \leftarrow درجه 30° ، $\alpha = 30^\circ$ ، $h_0 = 0$

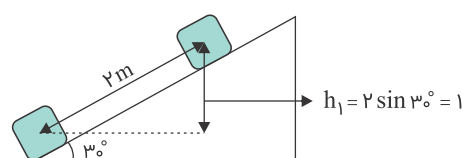
ج) با سرعت اولیه 5 m/s مماس با سطح روبه بالا پرتاب می‌کنیم $\leftarrow v_0 = 5 \text{ m/s}$

د) جسم روی سطح به اندازه 2 m بالا می‌رود \leftarrow وقتی 2 m بالا می‌رود آنگاه جسم متوقف می‌شود پس $v_1 = 0$

هـ) و سپس به همان نقطه اول برمی‌گردد \leftarrow اندازه کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت و در مسیر برگشت با هم برابر است.

و) کار نیروی اصطکاک در این مسیر رفت و برگشت چند ژول است؟ \leftarrow ؟ = رفت و برگشت W_f

گام دوم



با استفاده از قانون پایستگی انرژی، کار نیروی اصطکاک را در مسیر رفت به دست می‌آوریم:

$$W_f = E_1 - E_0 = \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0 \right)$$

$$\xrightarrow{h_1 = 2 \times \sin 30^\circ = 1 \text{ m}} W_f = (0 + 2 \times 10 \times 1) - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 5^2 - 0 \right) \Rightarrow W_f = -5 \text{ J}$$

از آنجاکه کار نیروی اصطکاک در مسیر رفت و برگشت را می‌خواهد، داریم:

$$W_{f \text{ برگشت و رفت}} = 2 \times -5 = -10 \text{ J}$$

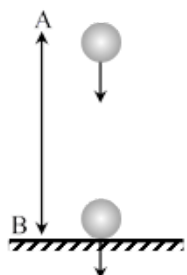
الف) گلوله‌ای به جرم $۱۰۰ \text{ g} = ۰/۱ \text{ kg}$

ب) از ارتفاع ۱۰ m

ج) با سرعت ۲ m/s

د) کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر، ۲ J باشد

و) انرژی جنبشی گلوله در لحظه برخورد به زمین چند ژول است؟ $K_B = ?$, $U_B = ۰$, $h_B = ۰$



ابتدا انرژی مکانیکی گلوله را در نقطه A به دست می‌آوریم تا K_B را محاسبه کنیم.

$$E_A = K_A + U_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

$$= \frac{1}{2} \times ۰/۱ \times ۴ + ۰/۱ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰/۲ \text{ J}$$

قانون پایستگی انرژی همواره برقرار است، بنابراین داریم:

$$E_A = E_B - W_{f_k} \Rightarrow E_A + W_{f_k} = E_B$$

$$\Rightarrow ۱۰/۲ - ۲ = U_B + K_B \Rightarrow K_B = ۸/۲ \text{ J}$$

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی و باتوجه به اینکه دو نیروی وزن و مقاومت هوا روی چتر باز کار انجام می‌دهند می‌توان نوشت:

$$W_f + W_g = \Delta K$$

$$W_f + mgh = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$W_f + ۱۰۰ \times ۱۰ \times ۵۰۰ = \frac{1}{2} \times ۱۰۰(۴/۵^2 - ۱/۵^2)$$

$$W_f = -۴۹۹۱ \times ۱۰^۲ \text{ J} = -۴۹۹/۱ \text{ kJ}$$

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$$

مبدأ سنجش ارتفاع را تپه دوم در نظر می‌گیریم:

$$v_o^2 + 2gh = v_B^2$$

$$0 + 2 \times 10 \times 12.5 = v_B^2$$

$$v_B^2 = 500 \Rightarrow v_B = 22.36 \text{ m/s}$$

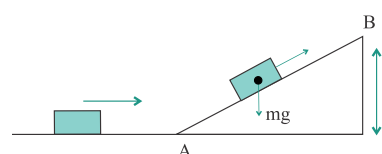
گام اول

الف) در شکل زیر جسم متحرک به جرم $2 \text{ kg} \leftarrow m = 2 \text{ kg}$

ب) اگر سرعت جسم در نقاط A و B به ترتیب برابر 20 m/s و 10 m/s باشد $\leftarrow v_A = 20 \text{ m/s}$, $v_B = 10 \text{ m/s}$

ج) کار نیروی اصطکاک روی سطح شیب‌دار چند ژول است؟ $\leftarrow W_{f_k} = ?$

گام دوم



نیروی اصطکاک و مولفه روی سطح شیب‌دار نیروی وزن در راستای حرکت، کار انجام می‌دهند. اگر جهت مثبت حرکت را روبه بالا در نظر بگیریم، کار نیروی وزن $-mgh$ می‌شود و باتوجه به قضیه کار و انرژی $12/5 \text{ m}$ داریم:

$$W_{mg} + W_{f_k} = \frac{1}{2}m(v^2 - v_o^2)$$

$$\Rightarrow -mgh + W_{f_k} = \frac{1}{2} \times 2 \times (10^2 - 20^2)$$

$$\Rightarrow -2 \times 10 \times 12/5 + W_{f_k} = -300 \Rightarrow W_{f_k} = -50 \text{ J}$$

گام اول

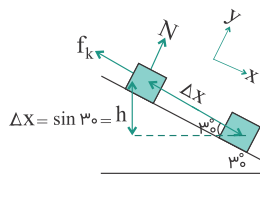
الف) جسمی به جرم $۲ \text{ kg} \leftarrow m = ۲ \text{ kg}$

ب) با سرعت اولیه ۵ m/s روبه پایین پرتاب می‌کنیم \leftarrow جهت مثبت را روبه پایین در نظر می‌گیریم؛ $v_0 = +۵ \text{ m/s}$

ج) اگر سرعت جسم پس از ۱۲ m متر جابه‌جایی روی سطح به ۸ m/s برسد $\leftarrow \Delta x = ۱۲ \text{ m}$ ، $v_f = ۸ \text{ m/s}$

د) کار نیروی اصطکاک چند ژول است؟ $\leftarrow W_{fk} = ?$

گام دوم



باتوجه به اینکه فقط دو نیروی اصطکاک و مولفه سطح شیب‌دار وزن در راستای حرکت، کار انجام می‌دهند و سرعت ابتدا و انتهای مسیر را داریم، از قضیه کار و انرژی استفاده می‌کنیم:

$$\left(W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_f = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_0^2) \right)$$

W_{mg} برابر است با:

$$\begin{cases} W_{mg} = mgh \\ h = \Delta x \sin 30^\circ = ۱۲ \times \frac{1}{2} = ۶ \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{mg} = ۲ \times ۱۰ \times ۶ = ۱۲۰ \text{ J}$$

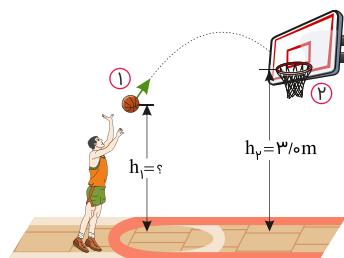
بنابراین داریم:

$$W_{mg} + W_{fk} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_0^2) \Rightarrow ۱۲۰ + W_{fk} = \frac{1}{2} \times ۲ \times (۶۴ - ۲۵)$$

$$\Rightarrow ۱۲۰ + W_{fk} = ۳۹ \Rightarrow W_{fk} = ۳۹ - ۱۲۰ = -۸۱ \text{ J}$$

گزینه ۱

چون مقاومت هوا ناچیز است و اتلاف انرژی نداریم، انرژی مکانیکی توپ پایسته است. بین لحظه‌ها شدن توپ از دست ورزشکار و لحظه ورود توپ به سبد، پایستگی انرژی را می‌نویسیم. (سطح مبدأ پتانسیل گرانشی را زمین در نظر می‌گیریم)



$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow ۱۰h_1 + \frac{1}{2}(۶)^2 = ۱۰(۳) + \frac{1}{2}(۵)^2 \Rightarrow h_1 = ۲/۴۵ \text{ m}$$

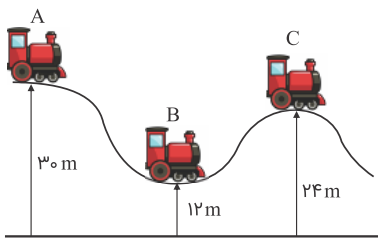
گام اول

الف) اصطکاک ناچیز است ← پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است.

ب) ارابه بدون سرعت اولیه از حالت A رها می‌شود ← $h_A = 30\text{ m}$, $v_A = 0$

ج) نسبت سرعت ارابه در حالت B به سرعت آن در حالت C کدام است؟ ← $\frac{v_B}{v_C} = ?$

گام دوم



اصل پایستگی انرژی مکانیکی را یک بار برای دو نقطه A و B و بار دیگر برای دو نقطه A و C نوشته و سرعت در لحظات B و C را می‌یابیم.

$$\begin{cases} E_B = E_A \\ h_B = 12\text{ m} \Rightarrow K_B + U_B = K_A + U_A \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + m_Bgh_B = mgh_A \Rightarrow \frac{1}{2}v_B^2 + 10 \times 12 = 10 \times 30 \Rightarrow |v_B| = \sqrt{360}\text{ m/s} \\ K_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_C = E_A \\ h_C = 24\text{ m} \Rightarrow K_C + U_C = K_A + U_A \Rightarrow \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C = mgh_A \Rightarrow \frac{1}{2}v_C^2 + 10 \times 24 = 10 \times 30 \Rightarrow |v_C| = \sqrt{120}\text{ m/s} \end{cases}$$

$$\left| \frac{v_B}{v_C} \right| = \sqrt{\frac{360}{120}} = \sqrt{3}$$

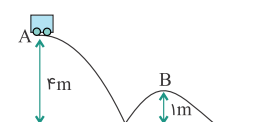
گام اول

الف) از نقطه A با سرعت 2 m/s می‌گذرد ← $v_A = 2\text{ m/s}$

ب) سرعت آن هنگام عبور از نقطه B چند متر بر ثانیه است ← $v_B = ?$

ج) از اصطکاک صرف‌نظر شود. ← پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است.

گام دوم



اصل پایستگی انرژی مکانیکی را برای دو نقطه A و B می‌نویسیم:

$$\begin{cases} E_A = E_B \\ h_B = 1\text{ m} \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \\ h_A = 4\text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(v_A)^2 + mg \times 4 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg \times 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times (2)^2 + 10 \times 4 = \frac{1}{2}(v_B)^2 + 10 \Rightarrow v_B = 8\text{ m/s}$$

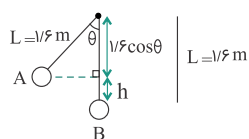
گام اول

الف) آونگی به طول $۱/۶$ متر $\leftarrow l = ۱/۶ \text{ m}$

ب) وقتی گلوله آونگ از پایین‌ترین نقطه مسیر می‌گذرد، سرعتش ۴ m/s است $\leftarrow v_B = ۴ \text{ m/s}$

ج) زاویه راستای نخ با خط قائم وقتی گلوله به بالاترین نقطه مسیر می‌رسد، چند درجه است؟ $\leftarrow \theta = ?$, $v_A = 0$

گام دوم



اصل پایستگی انرژی مکانیکی را برای دو نقطه A و B می‌نویسیم:

$$\begin{cases} E_A = E_B \\ U_B = 0 \\ K_A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow U_A = K_B$$

$$\Rightarrow m \times g \times h = \frac{1}{2} \times m \times (v_B)^2$$

$$\Rightarrow 10 \times h = \frac{1}{2} \times (4)^2 \Rightarrow h = 0.8 \text{ m}$$

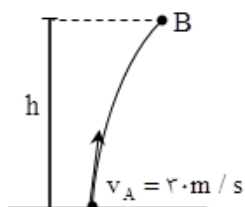
$$\begin{cases} h = L - L \cos \theta \\ h = 0.8 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0.8 = 1/6 (1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{1}{6} = 1 - \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{6} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

گام اول

- الف) گلوله‌ای در شرایط خلأ ← از مقاومت هوا صرف‌نظر شده $h_A = 0 \Rightarrow U_A = 0$ شده
 ب) از سطح زمین با سرعت اولیه 30 m/s در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود $v_A = 30 \text{ m/s}$
 ج) در چند متری سطح زمین انرژی جنبشی گلوله نصف پتانسیل گرانشی آن است؟ $\leftarrow \frac{K_B}{U_B} = \frac{1}{2}$, $h_B = ?$



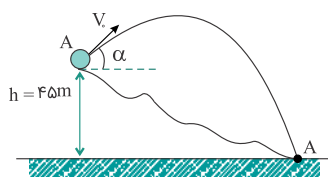
گام دوم

باتوجه به پایستگی انرژی مکانیکی در نقاط A و B داریم:

$$\begin{aligned}
 E_A &= E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B \\
 \Rightarrow K_A + 0 &= \frac{U_B}{2} + U_B \\
 \Rightarrow K_A &= \frac{3}{2} U_B \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{3}{2} m \times g \times h \\
 \Rightarrow (30)^2 &= 3 \times 10 \times h \Rightarrow h = 30 \text{ m}
 \end{aligned}$$

گام اول

- الف) گلوله‌ای در شرایط خلأ با سرعت اولیه 30 m/s ← مقاومت هوا $= 0$, $v_A = 30 \text{ m/s}$
 ب) از ارتفاع ۴۵ متری سطح زمین روبه بالا پرتاب می‌شود $h_A = 45 \text{ m}$
 ج) گلوله با سرعت چند متر بر ثانیه به زمین برخورد می‌کند؟ $\leftarrow U_B = 0 \Rightarrow h_B = 0$



گام دوم

سطح زمین را مبدأ پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم؛ کافی است اصل پایستگی انرژی مکانیکی را در دو نقطه A و B بنویسیم:

$$\begin{aligned}
 E_A &= E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \\
 \Rightarrow mgh_A + \frac{1}{2} m v_A^2 &= \frac{1}{2} m v_B^2 \\
 \Rightarrow 10 \times 45 + \frac{1}{2} \times (30)^2 &= \frac{1}{2} \times v_B^2 \Rightarrow 900 + 225 = \frac{1}{2} v_B^2 \\
 \Rightarrow v_B &= \pm 30\sqrt{2} \Rightarrow |v_B| = 30\sqrt{2} \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

گام اول

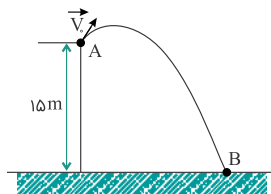
الف) از بالای یک بلندی به ارتفاع ۱۵ ← $h_A = 15 \text{ m}$

ب) جسمی به جرم $100 \text{ g} \leftarrow m = 100 \text{ g}$

ج) با سرعت اولیه 10 m/s پرتاب می‌کنیم ← $v_A = 10 \text{ m/s}$

د) اندازه سرعت جسم در هنگام برخورد با زمین چند m/s است ← $h_B = 0, v_B = ?$

گام دوم



اگر مبدأ پتانسیل را سطح زمین در نظر بگیریم، جسم در نقطه A انرژی پتانسیل و جنبشی دارد اما در نقطه B فقط انرژی جنبشی دارد. بنابراین باتوجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی ($E_A = E_B$)، داریم:

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\xrightarrow{\text{m از دو طرف تساوی ساده می‌شود}} \frac{1}{2} \times (10)^2 + 10 \times 15 = \frac{1}{2} \times (v_B)^2$$

$$\Rightarrow 200 \times 2 = (v_B)^2 \Rightarrow v_B = \pm 20 \text{ m/s} \Rightarrow |v_B| = 20 \text{ m/s}$$

گام اول

الف) جسم A به جرم m از ارتفاع ۱۰ متری سطح زمین رها می‌شود ← $v_{0A} = 0 \Rightarrow K_{0A} = 0, h_{0A} = 10 \text{ m}, m_A = m$

ب) جسم B به جرم 2 m از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین رها می‌شود ← $v_{0B} = 0 \Rightarrow K_{0B} = 0, h_{0B} = 20 \text{ m}, m_B = 2m$

ج) انرژی جنبشی جسم B در لحظه رسیدن به زمین چند برابر انرژی جنبشی جسم A در لحظه رسیدن به زمین است؟

$$\begin{cases} h_{1A} = 0 \Rightarrow U_{1A} = 0 \\ h_{1B} = 0 \Rightarrow U_{1B} = 0 \end{cases}, \frac{K_{1B}}{K_{1A}} = ?$$

گام دوم

اصل پایستگی انرژی مکانیکی را به طور جداگانه برای اجسام A و B به کار می‌بریم.
جسم A:

$$E_{0A} = E_{1A} \Rightarrow U_{0A} + K_{0A}$$

$$= U_{1A} + K_{1A} \Rightarrow U_{0A} = K_{1A}$$

جسم B:

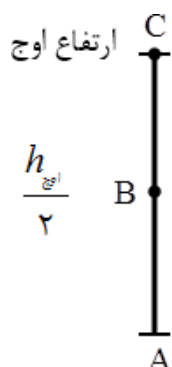
به دلیل تشابه شرایط مسئله برای دو جسم A و B داریم: $U_{0B} = K_{1B}$

در نتیجه نسبت خواسته شده در سوال برابر است با:

$$\frac{K_{1B}}{K_{1A}} = \frac{U_{0B}}{U_{0A}} = \frac{m_B g h_{0B}}{m_A g h_{0A}} = \frac{2m \times 20}{m \times 10} = 4$$

گام اول

الف) جسمی به جرم m را با سرعت 8 m/s در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم $\leftarrow v = 8 \text{ m/s}$
 ب) با نادیده گرفتن اتلاف انرژی \leftarrow طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی مکانیکی در تمام طول حرکت جسم ثابت است.
 ج) سرعت جسم در نیمه راه روبه بالا چند متر بر ثانیه است؟ \leftarrow = نصف ارتفاع اوج v



گام دوم

ابتدا اصل پایستگی انرژی مکانیکی را برای دو نقطه A و C و بار دیگر برای دو نقطه A و B می‌نویسیم:

$$\begin{cases} E_A = E_C \\ h_A = 0 \Rightarrow U_A = 0 \\ v_C = 0 \Rightarrow K_C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_A + K_A = U_C + K_C \Rightarrow K_A = U_C \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_C$$

$$\Rightarrow h_C = \frac{v_A^2}{2g} \Rightarrow h_C = \frac{(8)^2}{2 \times 10} = 3/2 \text{ m}$$

$$\begin{cases} E_A = E_B \\ h_B = \frac{h_C}{2} = \frac{3/2}{2} = 1/6 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K_A = U_B + K_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times (8)^2 = \frac{1}{2} \times (v_B)^2 + 10 \times 1/6 \Rightarrow v_B = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$$

گام اول

الف) جسمی به جرم 2 kg $\leftarrow m = 2 \text{ kg}$
 ب) با سرعت 10 m/s در راستای قائم روبه بالا پرتاب می‌کنیم $\leftarrow v_0 = 10 \text{ m/s}$, $h_0 = 0 \Rightarrow U_0 = 0$
 ج) انرژی مکانیکی جسم در نصف ارتفاع اوج چند ژول است؟ \leftarrow طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، انرژی مکانیکی در تمام طول مسیر حرکت جسم یکسان است؛ پس $E_1 = E_0 = ?$

گام دوم

کافی است انرژی مکانیکی جسم را در لحظه پرتاب به دست آوریم:

$$\begin{cases} E_0 = E_1 \\ E_0 = U_0 + K_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1 = K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 100 = 100 \text{ J}$$

طبق قضیه کار و انرژی جنبشی می‌توانیم کار انجام‌شده روی گلوله از طرف دیوار را محاسبه کنیم:

$$W = \Delta K = K_v - K_1 = \frac{1}{2}m(v_v^2 - v_1^2)$$

$$W = \frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-3} (0 - 300^2)$$

$$W = 2 \times 10^{-2} (0 - 9 \times 10^4) \Rightarrow W = -1800 \text{ J}$$

کار نیروی وزن برای یک جسم تنها به تغییر ارتفاع آن بستگی دارد و مسیر حرکت مهم نیست. چون در این سؤال تغییر ارتفاع هر سه توپ یکسان است، کار نیروی وزن این سه توپ مشابه، یکسان است.

$W_{\text{وزن}} = mgh = -\Delta U$ ، ΔU : تغییر انرژی پتانسیل گرانشی

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = m_v = m_w \\ \Delta h_1 = \Delta h_v = \Delta h_w = h \end{array} \right\} \xrightarrow{W=mgh} W_1 = W_v = W_w$$

از قضیه کار و انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم:

$$W = \Delta K$$

$$\frac{W_v}{W_1} = \frac{\frac{1}{2}m((3v)^2 - (v)^2)}{\frac{1}{2}m(v^2 - 0)} = \frac{8v^2}{v^2} = 8$$

گام اول

الف) جسمی با سرعت 10 m/s در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند و انرژی جنبشی آن $K_1 = 100 \text{ J}$ ، $v_1 = 10 \text{ m/s}$ ،
 ب) پس از مدتی سرعت جسم تغییر کرده و در جهت منفی محور x ها به 20 m/s می‌رسد ← جسم در جهت منفی حرکت می‌کند پس:
 $v_2 = -20 \text{ m/s}$

ج) کار برآیند نیروهای وارد بر این جسم در این مدت چند ژول است؟ ← $W_T = ?$

گام دوم

ابتدا جرم جسم را به دست می‌آوریم، سپس با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی، کار برآیند نیروهای وارد بر جسم را محاسبه می‌کنیم.

$$K = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow 100 = \frac{1}{2} \times m \times (10)^2 \Rightarrow m = 2 \text{ kg}$$

$$W_T = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_v^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times ((-20)^2 - (10)^2) = 300 \text{ J}$$

گام اول

الف) گلوله‌ای به جرم $2 \text{ kg} \leftarrow m = 2 \text{ kg}$ ب) با سرعت اولیه $20 \text{ m/s} \leftarrow v_o = 20 \text{ m/s}$ ج) این گلوله با سرعت 10 m/s از نقطه اوج می‌گذرد $\leftarrow v_1 = 10 \text{ m/s}$ د) کار برآیند نیروهای وارد بر گلوله از لحظه پرتاب تا زمان رسیدن به نقطه اوج چند ژول است؟ $\leftarrow W_T = ?$

گام دوم

باتوجه به اینکه سرعت اولیه و نهایی را داریم، می‌توانیم از قضیه کار و انرژی استفاده کنیم:

$$W_T = \Delta K = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_o^2)$$

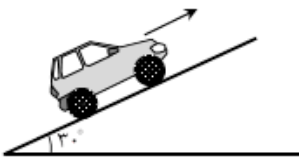
$$\Rightarrow W_T = \frac{1}{2} \times 2 \times ((10)^2 - (20)^2) = -300 \text{ J}$$

گام اول

الف) اتومبیلی به جرم $2 \text{ تن} \leftarrow m = 2000 \text{ kg}$ ب) در یک جاده شیب‌دار که با سطح افق زاویه 30° درجه می‌سازد $\leftarrow \alpha = 30^\circ$ ج) اگر سرعت اتومبیل در مدت 20 ثانیه از 2 m/s به 12 m/s برسد $\leftarrow \Delta t = 20 \text{ s}$, $v_1 = 2 \text{ m/s}$, $v_2 = 12 \text{ m/s}$ د) کار برآیند نیروهای وارد بر اتومبیل در این بازه زمانی چند کیلوژول است؟ $\leftarrow W_T = ? \text{ kJ}$

گام دوم

کافی است قضیه کار و انرژی را برای اتومبیل بنویسیم:



$$W_T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 2000 \times ((12)^2 - (2)^2) = 140 \times 10^3 \text{ J} = 140 \text{ kJ}$$

الف) جرم جسمی $2 \text{ kg} \leftarrow 2 \text{ kg}$ $m = 2 \text{ kg}$

ب) سرعت آن در یک مسیر مستقیم v_1 است. اگر سرعت آن به اندازه $\lambda \text{ m/s}$ افزایش یابد $v_2 = v_1 + \lambda$

ج) انرژی جنبشی آن ۴ برابر می‌شود. $\frac{K_2}{K_1} = 4 \leftarrow$

د) v_1 چند متر بر ثانیه است؟ $\leftarrow v_1 = ?$

باتوجه به نسبت $\frac{K_2}{K_1} = 4$ و رابطه $v_2 = v_1 + \lambda$ سرعت ثانویه را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} \Rightarrow 4 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow v_2 = \pm 2v_1$$

باتوجه به رابطه به دست آمده ۲ حالت خواهیم داشت:

حالت اول: $v_2 = +2v_1$

$$\begin{cases} v_2 = v_1 + \lambda \\ v_2 = 2v_1 \end{cases} \Rightarrow 2v_1 = v_1 + \lambda \Rightarrow v_1 = \lambda \text{ m/s}$$

حالت دوم: $v_2 = -2v_1$

$$\begin{cases} v_2 = v_1 + \lambda \\ v_2 = -2v_1 \end{cases} \Rightarrow -2v_1 = v_1 + \lambda \Rightarrow -3v_1 = \lambda \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda}{3} \text{ m/s}$$

برای v_1 ، ۲ مقدار محاسبه شد که فقط $v_1 = \lambda \text{ m/s}$ در گزینه‌ها می‌باشد.

الف) انرژی جنبشی گلوله‌ای $4 \text{ J} \leftarrow 4 \text{ J}$ $K_1 = 4 \text{ J}$

ب) و سرعت آن 4 m/s است $v_1 = 4 \text{ m/s}$

ج) سرعت آن را به چند متر بر ثانیه برسانیم تا انرژی جنبشی آن 5 J شود؟ $\leftarrow v_2 = ?$, $K_2 = 5 \text{ J}$

باتوجه به اینکه جرم گلوله تغییر نکرده کافی است نسبت K_1 به K_2 را به دست آوریم تا سرعت در ثانویه به دست آید:

$$\begin{aligned} \frac{K_2}{K_1} &= \frac{\frac{1}{2}m(v_2)^2}{\frac{1}{2}m(v_1)^2} \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{5}{4} &= \left(\frac{v_2}{4}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{v_2}{4} \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$W = F_x d_x + F_y d_y = 30 \times 6 + 40 \times 0 = 180 \text{ J}$$

اگر نیروی \vec{F} برآیند چند نیرو مثل \vec{F}_1 و \vec{F}_2 و ... باشد، داریم:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

از طرفی با حاصلضرب جابه‌جایی در نیرو خواهیم داشت:

$$W = W_1 + W_2 + \dots$$

مطابق صورت سوال، کار برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر است، بنابراین:

$$W = 0 \Rightarrow W_1 + W_2 + \dots = 0$$

درنتیجه مجموع کار نیروهای وارد بر جسم نیز در آن جابه‌جایی برابر صفر است.

الف) اتومبیلی با سرعت $90 \text{ km/h} \leftarrow 90 \text{ km/h} = \frac{90}{3.6} \text{ m/s} = 25 \text{ m/s}$

ب) سرعت اتومبیل تقریباً چند متر بر ثانیه افزایش یابد، تا انرژی جنبشی آن ۲ برابر شود؟ $\Delta v = ?$, $\frac{K_2}{K_1} = 2$

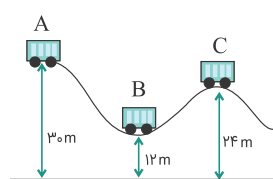
کافی است نسبت انرژی جنبشی اتومبیل را بنویسیم:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}m(v_2)^2}{\frac{1}{2}m(v_1)^2} \Rightarrow 2 = \left(\frac{v_2}{25}\right)^2 \Rightarrow v_2 = 25\sqrt{2} \simeq 35 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = 35 - 25 = 10 \text{ m/s}$$

بنابراین سرعت اتومبیل باید نسبت به حالت قبلش 10 m/s افزایش پیدا کند.

با استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \Rightarrow mgh_A + \cancel{\frac{1}{2}mv_A^2} = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_B^2 = g(h_A - h_B) \Rightarrow v_B^2 = 2g\Delta h \Rightarrow v = \sqrt{2g\Delta h}$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{20 \times (30 - 12)} = \sqrt{20 \times 18} = \sqrt{360} \text{ m/s}$$

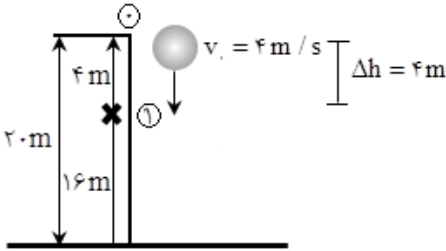
$$\Rightarrow v_C = \sqrt{20 \times (30 - 24)} = \sqrt{20 \times 6} = \sqrt{120} \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \frac{v_B}{v_C} = \frac{\sqrt{360}}{\sqrt{120}} = \sqrt{3}$$

الف) گلوله‌ای از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین $\leftarrow h_0 = 20 \text{ m}$

ب) با سرعت اولیه $4 \text{ m/s} \leftarrow v_0 = 4 \text{ m/s}$

ج) انرژی جنبشی این گلوله بعد از ۴ متر پایین آمدن چندبرابر می‌شود؟ $\leftarrow \frac{K_1}{K_0} = ?$, $h_1 = 20 - 4 = 16 \text{ m}$



باتوجه به پایستگی انرژی مکانیکی در نقاط ۰ و ۱ می‌توانیم نسبت $\frac{K_1}{K_0}$ را به دست بیاوریم. مبدأ پتانسیل را ارتفاع ۱ ($U_1 = 0$) در نظر می‌گیریم، بنابراین:

$$E_0 = E_1 \Rightarrow K_0 + U_0 = K_1 + U_1 \Rightarrow K_0 + U_0 = K_1$$

$$\begin{cases} K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times m \times (4)^2 = 8m \\ U_0 = mgh = m \times 10 \times 4 = 40m \end{cases}$$

$$K_1 = K_0 + U_0 = 8m + 40m = 48m$$

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{48m}{8m} = 6$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \text{ وقتی جرم ثابت است:}$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{K_2=1/44K_1} 1/44 = \left(\frac{v+5}{v}\right)^2$$

از طرفین رابطه جذر می‌گیریم:

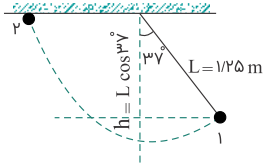
$$1/2 = \frac{v+5}{v} \Rightarrow 1/2v = v+5$$

پس:

$$0/2v = 5 \Rightarrow v = \frac{5}{0/2} = 25 \text{ m/s}$$

طبق تعریف، فقط نیرویی که در راستای جابه‌جایی است، کار انجام می‌دهد. پس باتوجه به اینکه جابه‌جایی در جهت $+x$ است، تنها نیروی F_x کار انجام داده است:

$$W = F_x \cdot x \cos 0 = 15 \times 10 = 150 \text{ J}$$



مبدأ پتانسیل را نقطه ۱ در نظر می‌گیریم ($U_1 = 0$). باتوجه به اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

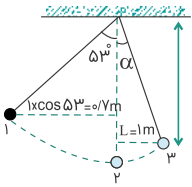
$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ U_1 = 0 \\ K_2 = 0 \\ h = L \cos 37^\circ \\ L = 1/25 \\ \cos 37^\circ = 0.8 \end{cases} \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\Rightarrow K_1 = U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 = gL \cos 37^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}v_1^2$$

$$= 10 \times 1/25 \times 0.8 \Rightarrow |v_1| = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

با استفاده از قضیه پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 - mgh_2$$

$$\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2g(h_1 - h_2)$$

$$\Rightarrow v_2^2 - 0 = 2g(1 - 0.8) \xrightarrow{v_2=v} v^2 = 0.4$$

$$E_2 = E_3 \Rightarrow K_2 + U_2 = K_3 + U_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_2 - mgh_3$$

$$\Rightarrow v_3^2 - v_2^2 = 2g(h_2 - h_3) \Rightarrow v_3^2 - 0.4 = 2g(0 - h_3)$$

$$\xrightarrow{v_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}v} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v \right)^2 - v^2 = -2gh_3$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = 2gh_3 \Rightarrow \frac{0.4}{2} = 2 \times 10 \times h_3 \Rightarrow h_3 = 0.01 \text{ m}$$

$$l' = l - h_3 = 1 - 0.01 = 0.99 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{l'}{l} = \frac{0.99}{1} = 0.99 \Rightarrow \alpha = 8.1^\circ$$

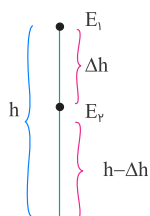
الف) اگر سرعت متحرک به جرم m به اندازه 5 m/s افزایش پیدا کند $\leftarrow v_2 = v_1 + 5$
 ب) افزایش انرژی جنبشی آن $\frac{5}{4}$ انرژی جنبشی اولیه می‌شود $\leftarrow \Delta K = \frac{5}{4}K_1 \Rightarrow K_2 = \frac{9}{4}K_1$
 ج) سرعت اولیه متحرک چند متر بر ثانیه بوده است؟ $\leftarrow v_1 = ?$

با استفاده از رابطه $K = \frac{1}{2}mv^2$ داریم:

$$K_2 = \frac{9}{4}K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow (v_1 + 5)^2 = \frac{9}{4}v_1^2 \Rightarrow v_1 + 5 = \frac{3v_1}{2} \Rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s}$$

در این گونه سؤالات بهترین راه حل استفاده از پایستگی انرژی مکانیکی کل است.



$$E_1 = \cancel{K_1} + U_1 = mgh$$

$$E_2 = K_2 + U_2 = \frac{1}{4}U_2 + U_2 = \frac{5}{4}U_2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \cancel{mgh} = \frac{5}{4}\cancel{mg}(h - \Delta h)$$

$$\Rightarrow 4h = 5h - 5\Delta h \Rightarrow \frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{5}$$